УДК 519.6

Н.В. ШАТОХИНА

СЛУЧАЙНЫЙ СПРОС В ЗАДАЧАХ ФОРМИРОВАНИЯ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ С АЛГОРИТМИЧЕСКИМИ И АНАЛИТИЧИСКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ

У даній статті запропоновано модель багатокритеріальної динамічної немарківської задачі вибору стратегії розвитку підприємства з урахуванням попиту, величина якого описана за допомогою апарату теорії ймовірності і метод її розв’язання. Модель задачі включає алгоритмічні та аналітичні цільові функції таобмеження. Розглянуто підхід до аналізу стійкості здобутого рішення.

Введение. Ключевой исходной информацией в задачах поиска оптимальных планов и стратегии развития производственных предприятий является объем прогнозируемого спроса на продукцию.

Существует значительное количество работ и различных направлений, изучающих спрос и потребности населения на макроэкономическом и на микроэкономическом уровнях. Эти проблемы имеют первостепенное значение для рыночной экономики, стремящейся к наиболее полному удовлетворению изменчивых потребностей общества, которое проходит в форме удовлетворения платежеспособного спроса.

Ранее авторами для формализации задач оптимизации планов развития производственных систем была предложена модель в однокритериальной постановке с алгоритмической целевой функцией, алгоритмическими и аналитическими ограничениями [1]. Следующим этапом развития данного направления стала формулировка модели задачи выбора стратегии развития предприятия в многокритериальной постановке с учётом возможности осуществления мероприятий по стимулированию спроса на продукцию и учёта рисков, сопутствующих их реализации. В работе [2] были предложены модель и метод решения многокритериальной динамической немарковской задачи выбора стратегии развития с булевыми переменными, содержащей аддитивную целевую функцию с нечетким слагаемым.

Следует отметить, что существует множество факторов, влияющих на спрос. Измерение спроса и его прогнозирование представляют довольно сложную задачу. Её решают на уровне определённого рынка сбыта для конкретной продукции. При этом выделяют ряд существенных особенностей, на базе которых можно строить математические модели, описывающие сложившуюся ситуацию. Самыми достоверными можно считать модели, в которых уровень спроса сопоставляется с такими факторами как уровень дохода потребителей, качество производимой продукции, характеристики конкурирующих товаров, погодные условия и многое другое. Однако между подобными величинами не возможно установить строго функциональные зависимости, что является причиной некоторых упрощений при моделировании спроса. Для этого используют различные экспертные методы, методы прогнозирования и аппарат теории вероятности.

В данной статье предложена модель многокритериальной динамической немарковской задачи выбора стратегии развития предприятия с учётом спроса, величина которого описана при помощи аппарата теории вероятности и метод её решения.

1. Представление спроса. Перейдем к описанию величины прогнозируемого спроса для создания модели задачи формирования стратегии развития производственного предприятия.

Будем рассматривать спрос как случайную величину (СВ). В общем виде случайный спрос, как и любая другая СВ, зависит от ряда факторов, т.е. $B(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_s)$. К таким факторам отнесём: уровень покупательной способности, степень информируемости населения, наличие конкурентов на данном рынке и т.п. Изменение одного или нескольких факторов влечет за собой и изменение рассматриваемого параметра. В общем случае влияние подобных факторов может быть различным. В данной работе будем полагать, что уровень воздействия различных факторов на спрос являются величинами одного порядка.

Тогда можно описывать величину спроса нормальным законом. Данное допущение можно обосновать центральной предельной теоремой [3]. Для случая нормального закона описания спроса можно говорить о зависимостях математического ожидания и дисперсии от данных факторов: $m_B(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_s)$, $\sigma_B(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_s)$. Для более общего случая, когда вид закона, описывающего плотность распределения СВ, заранее не известен, целесообразно использовать методику получения непрерывной аппроксимации статистических законов распределения различного характера, предложенную в работе [4]. В ней предложена модель для аппроксимации плотностей распределения следующего вида:

$$\varphi(y)=A\left[1+\theta_4\frac{(y-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right]exp\left[-\frac{(y-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\left(\rho+\theta_3\,sgn(y-\theta_1)\right)\right], \qquad (1)$$

где $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ – параметры, которые определяют математическое ожидание, дисперсию, асимметрию и эксцесс случайной величины; ρ – параметр, задающий возможный диапазон значений θ_3 и обеспечивающий унимодальность функции $\varphi(y)$; A – нормирующий коэффициент, определяемый из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)dy=1$.

Пятипараметрическое распределение (1) позволяет описывать кривые распределения произвольных форм.

В работе [5] предложен частный случай трёхпараметрического распределения вероятностей, который обладает возможностями по варьированию математическим ожиданием θ_1, дисперсией θ_2 и асимметрией θ_3. При $\theta_3 = 0$ возвращаемся к нормальному закону распределения.

Аналитическое представление пяти- и трёх-параметрических распределений обеспечивает оценивание их параметров по статистическим данным с применением простых численных процедур.

Рассмотрим случай представления спроса нормальным законом для бикритериальной динамической задачи выбора оптимальной стратегии развития предприятия, с алгоритмическими и аналитическими ограничениями и целевыми функциями дохода и затрат:

$$F^1 = Pt = \sum_{t=1}^{T}\sum_{h=1}^{H} Ц_t^{(h)} Б_t^{(h)}(x_{jt}) + \sum_{t=1}^{t_н}\sum_{j=1}^{M}\sum_{r=1}^{l} Л_{jr} x_{jt} + Л_{пред} \to \max_{x_{jt}}, \qquad (2)$$

$$F^2 = Cs = \sum_{t=1}^{t_н}\sum_{j=1}^{M}\sum_{r=1}^{l} \omega_{jr}\alpha_{t+r-1} x_{jt} + \sum_{t=1}^{T} И_t \alpha_t +$$

$$+\left(\sum_{t=1}^{T} S_t^{\,и} + \sum_{t=1}^{T} S_t^{\,a} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{M}\sum_{п=1}^{П} q_п{}^{j}U_п(x_{jt})\right) + \omega_{пред} + И_{пред} \to \min_{x_{jt}}, \qquad (3)$$

$$Б_t^{(h)} = \begin{cases} A_t^{(h)}, & если\, A_t^{(h)} \le B_t^{(h)}, \\ B_t^{(h)}, & если\, A_t^{(h)} > B_t^{(h)}, \end{cases} \qquad (4)$$

$$A_t^{(h)} = \Phi\left(A_{t-1}^{(h)}, x_{jp}\right),\ j = \overline{1, M},\ p = \overline{t+1-g, t}, \qquad (5)$$

где $l = 1 - t + \min(t + g - 1, T)$; Pt, Cs *(profit, costs)*– критерии прибыли и затрат соответственно; $B_t^{(h)}$ – случайная величина спроса на продукцию *h*-го типа в году *t*; T – плановый период; $A_t^{(h)}$ – производственная мощность по *h*-му типу продукции в году *t*; $Ц_t^{(h)}$ – цена на продукцию *h*-го типа в том же году; w_{jr}, $Л_{jr}$ – единовременные затраты и остаточная стоимость основных фондов в *r*-м году с начала реализации *j*-го варианта развития; $И_t$ – текущие затраты *t*-го года; x_{jt} – булева переменная, равная “1” в случае внедрения варианта развития в году t и равная “0” в противном случае, j – номер варианта развития; $S_t^{\,и}$ – затраты на идентификацию рисков в году *t*; $S_t^{\,a}$ – затраты на анализ, расчёт рисков и выработку решений по предупреждению соответствующих рисков при *j*-м варианте развития; остальные ограничения задачи и содержащиеся в них параметры рассмотрены в работе [2].

Плотность распределения величины спроса $B_t^{(h)}$ запишем как $f\left(B_t^{(h)}\right)$.

Запишем вероятность для условия (4). Она составляет:

$$P\left(B_t^{(h)} > A_t^{(h)}\right) = \int_{A_t^{(h)}}^{\infty} f\left(B_t^{(h)}\right) dB_t^{(h)} = P \text{, тогда } Б_t^{(h)} = \left(A_t^{(h)} \cdot P + B_t^{(h)} \cdot (1-P)\right),$$

$$f\left(B_t^{(h)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{B_t^{(h)}}} exp\left\{-\frac{\left(B_t^{(h)} - m_{B_t^{(h)}}\right)^2}{2\sigma^2_{B_t^{(h)}}}\right\},$$

$$f\left(Б_t^{(h)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{B_t^{(h)}} \cdot (1-P)} exp\left\{-\frac{\left(Б_t^{(h)} - \left(m_{B_t^{(h)}} \cdot (1-P) + A_t^{(h)} \cdot P\right)\right)^2}{2\hat{\sigma}^2_{B_t^{(h)}}}\right\},$$

$$f\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{h=1}^{H} Ц_t^{(h)} \cdot Б_t^{(h)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma} \exp\left\{-\frac{\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{h=1}^{H} Ц_t^{(h)} \cdot Б_t^{(h)} - m_\Sigma\right)^2}{2{\sigma_\Sigma}^2}\right\}, \text{ где}$$

$$m_\Sigma = \sum_{t=1}^{T}\sum_{h=1}^{H} Ц_t^{(h)} \cdot \left(m_{B_t^{(h)}} \cdot (1-P) + A_t^{(h)} \cdot P\right),\ \sigma_\Sigma^2 = \sum_{t=1}^{T}\sum_{h=1}^{H} Ц_t^{(h)^2} \cdot \sigma^2_{B_t^{(h)}} \cdot (1-P)^2 .$$

Получив данные характеристики можно осуществлять оптимизацию критерия дохода и затрат, сравнивая средние значения возможных вариантов.

Поскольку в рассматриваемом случае СВ спроса характеризуется двумя величинами: математическим ожиданием и дисперсией, для выбора наилучшего варианта развития с точки зрения критерия дохода прежде всего отдают предпочтение варианту, которому соответствует наибольшее значение математического ожидания - $m_{\Sigma j}$ оптимизируемой функции. При равных средних величинах спроса, выбирают тот вариант, у которого дисперсия меньше. Для примера предложенного на рис.1 это вариант б).

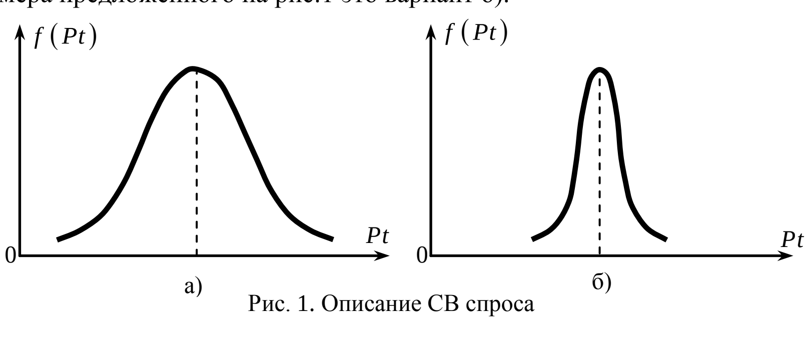

Рис. 1. Описание СВ спроса

Заметим, что для адекватного анализа случаев распределений общего вида средних величин часто недостаточно. Более эффективным будет использование подхода, реализующего расчет вероятности превышения заданного порога [4]. Использование пороговых значений обуславливает надежность процесса принятия решений. Величину “порогового” (критического) значения задают экспертным путём. Будем полагать, что она отклоняется от математического ожидания на 5-10%.

При вероятностной постановке задачи целевая функция в задаче оптимизации дохода будет иметь вид $P\left(Pt > Pt_{крит}\right)$ (см. рис. 2,а),

$$P\left(Pt > Pt_{крит}\right) = \int_{Pt_{крит}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Sigma}} exp\left\{-\frac{\left(Pt - m_{\Sigma}\right)^2}{2\sigma_{\Sigma}{}^2}\right\} dPt \ . \qquad (6)$$

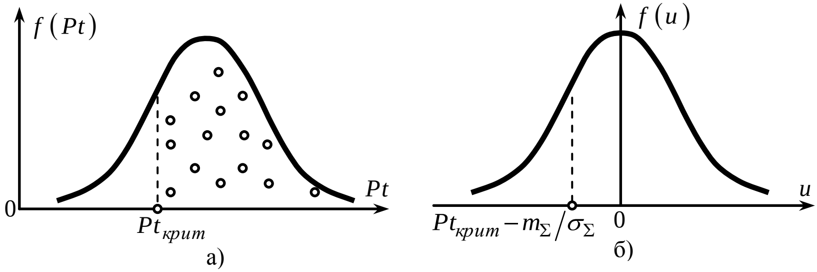

Рис. 2. Величина порогового значения

После введения новой переменной $u = \dfrac{\left(Pt - m_{\Sigma}\right)}{\sigma_{\Sigma}}$, задача максимизации (6) приобретает вид

$$P\left(Pt > Pt_{крит}\right) = \int_{\frac{Pt_{крит} - m_{\Sigma}}{2\sigma_{\Sigma}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Sigma}} exp^{-\frac{u^2}{2}} du \to max \qquad (6')$$

Максимизация вероятности (6′) эквивалентна минимизации нижнего предела в (6′) (см. рис. 2,б):

$$\frac{\left(Pt - m_{\Sigma}(x_{jt})\right)}{\sigma_{\Sigma}(x_{jt})} \to \min_{x_{jt}} \quad \approx \quad \frac{\left(m_{\Sigma}(x_{jt}) - Pt\right)}{\sigma_{\Sigma}(x_{jt})} \to \max_{x_{jt}} .$$

Максимум данная функция достигает при наибольшем математическом ожидании и наименьшей дисперсии, т.е. $m_{\Sigma}(x_{jt}) \to max$ и $\sigma_{\Sigma}(x_{jt}) \to min$.

Подобную задачу целесообразно решать модифицированным методом неявного перебора в зависимости от постановки задачи (т.е. в зависимости от количества рассматриваемых вариантов и длительности планового периода). В случае, если число вариантов обозримо, достаточно воспользоваться методом последовательного распределения, относящегося к группе методов, в которых осуществляется последовательный перебор всех вариантов [4]. Наилучший вариант является оптимальным вариантом для данной задачи, для него мы рассчитываем $P_{opt}(Pt)$. Аналогично осуществляется расчет $P_{opt}(Cs)$.

2. Анализ устойчивости. Для проведения анализа устойчивости полученного решения в задачах подобного типа нам понадобится и вариант следующий за оптимальным, т.е. наилучший из оставшихся. Будем читать, что полученное решение устойчиво, когда $\left(P_{opt}(Pt) > \max_{j \neq j^*} Pt_j\right) \geq \gamma$.

$$P_{opt}(Pt) - P_{max}(Pt) \geq \gamma .$$

При расчете такой вероятности γ выбирается в зависимости от требований предъявляемых к решению в конкретной ситуации (например, $\gamma = 0{,}25$).

Рассмотрим вычисление разности (z) на примере двух СВ ξ_1 и ξ_2.

Поскольку $f_{\xi_1}(x) = e^{-\left(\frac{(\xi_1 - m_1)}{2\sigma_1^2}\right)^2}$, $f_{\xi_2}(x) = e^{-\left(\frac{(\xi_2 - m_2)}{2\sigma_2^2}\right)^2}$, то функция распределения разности составит $f_\Sigma(z) = e^{-\left(\frac{z-(m_1-m_2)}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)^2}$. Тогда $P(z \geq 0) = \int_0^\infty f_\Sigma(z)dz$.

Выводы. Предложены модель многокритериальной динамической немарковской задачи выбора стратегии развития предприятия с учётом случайного спроса с алгоритмическими и аналитическими целевыми функциями и ограничениями и метод её решения. Рассмотрен подход к анализу устойчивости решения сформулированной задачи.

Результаты работы использованы при оптимизации производственно-экономических показателей технологических процессов на этапе получения диффузионного сока свеклосахарного производства в рамках совместных работ с фирмой “Диффузия”.

Список литературы: **1**. *Кононенко И.В.* Оптимизация развития производственных систем, представленных имитационными моделями. – К., 1990. – 31с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 90-36). **2**. *Кононенко И.В., Шатохина Н.В.* .Метод решения задачи формирования плана развития предприятия с использованием алгоритмических моделей и нечетких представлений // Вестник НТУ “ХПИ”. –2003. №18. С.147-152. **3**. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей.– М.: Наука, 1969. 576с. **4**. *Костенко Ю.Т., Раскин Л.Г.* Прогнозирование технического состояния систем управления. – Х.: Основа, 1996. 303с. **5**. *Серая О.В.* Аппроксимация гистограмм трехпараметрическим распределением случайных величин // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. 2001. №3. С.81-83.

Поступила в редколлегию 15.11.05